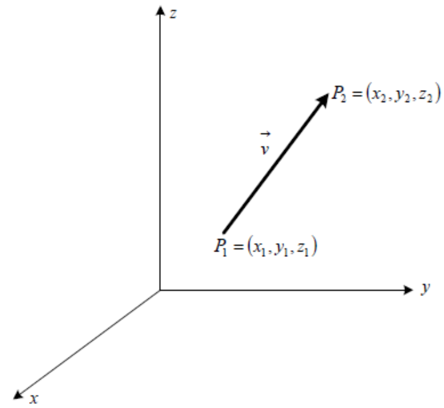
VECTORES EN R^3

Un vector en el espacio, (R^3), se representa por una terna ordenada de números reales, denotada de la siguiente manera:

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

Geométricamente, un vector en R^3, se representa como un segmento de recta dirigido desde un punto inicial P_1 hasta un punto final P_2. Este vector también se puede representar con el punto P_1 ubicado sobre el origen como punto de partida.



Representación de un vector por segmento dirigido:

$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$
$\vec{v} = (x, y, z) = (v_1, v_2, v_3)$
$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1)$
$v_1 = x_2 - x_1, \quad v_2 = y_2 - y_1, \quad v_3 = z_2 - z_1)$

Magnitud o norma del vector $\vec{v}$: Longitud del segmento de recta que definen al vector.

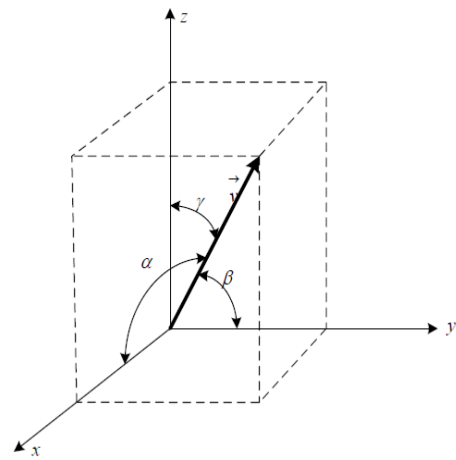
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2}$$

Dirección y sentido de un vector:

El sentido de un vector $\vec{v} = (x, y, z)$, lo define la flecha dibujado sobre el lado final del segmento de la recta.

La dirección del vector $\vec{v} = (x, y, z)$, está definida por la medida de los ángulos que forma la línea de acción del segmento de recta con cada uno de los ejes x, y, z.



Los ángulos α, β y γ se conocen como ángulos directores. Cada uno de estos ángulos se calcula directamente como se indica:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\|\vec{v}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\|\vec{v}\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\|\vec{v}\|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Igualdad de vectores en R^3:

Dos vectores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ si y solo si $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$ y $v_3 = u_3$

Vectores unitarios canónicos:
i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)
Nota: Cualquier vector en R^3, se puede expresar como combinación lineal de los vectores unitarios canónicos.

$$\vec{v} = (x, y, z) = \vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Operaciones:

1. **Suma:** Sean $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ dos vectores en R^3 tales que $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ entonces la suma de $\overrightarrow{v_1}$ con $\overrightarrow{v_2}$ denotada como $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, se define como:

$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = x_2 + x_1,\ y_2 + y_1,\ z_2 + z_1)$$

Propiedades de la suma:
Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en R^3, se tiene las siguientes propiedades

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ propiedad conmutativa
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ propiedad asociativa
3. $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$, existencia de un vector **neutro** $\vec{0} = (0, 0, 0)$
4. $\vec{v} + \overrightarrow{-v} = \vec{0}$, existencia de un vector $\overrightarrow{-v}$ llamado **inverso aditivo** de $\vec{v}$

2. **Multiplicación por escalar:**

Si $a, b \in R$ y $\vec{v} = (x, y, z)$ es un vector en R^3 entonces $a\vec{v} = (ax, ay, az)$

Propiedades:

1. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

2. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

3. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

3. **Producto escalar, producto punto o producto interno:**

Sean $\vec{v}$ y $\vec{u}$ vectores en R^3 tales que $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$ se define el **producto escalar** entre $\vec{v}$ y $\vec{u}$ como:

$$\vec{v}.\vec{u} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Propiedades del producto escalar:

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

2. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

3. $(a\,\vec{u}).(b\vec{v}) = ab(\vec{u}.\vec{v})$

4. Si $\vec{u} = (x,y,z)$, entonces $\vec{u}.\vec{u} = (x,y,z).(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)$

   Esto significa que $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ entonces $\|\vec{u}\|\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

4. Producto vectorial o producto cruz:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en R^3 tales que $\vec{u} = (x_1,y_1,z_1)$ y $\vec{v} = (x_2,y_2,z_2)$ se define el **producto vectorial** entre $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ como:

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Propiedades del producto cruz:

1. El vector $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$

2. El sentido del vector $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$ se obtiene con la regla de la mano derecha cerrando los dedos desde $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$. El dedo pulgar indica la dirección del vector $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$

3. $\vec{u} \text{ x } \vec{v} = -(\vec{v} \text{ x } \vec{u})$

4. $\vec{u} \text{ x } \vec{u} = 0$

5. Si $\vec{u} \parallel \vec{v}$, entonces $\vec{u} \text{ x } \vec{v} = 0$

6. $a_1\,\vec{u} \text{ x } a_2\,\vec{v} = a_1\,a_2\,(\vec{u} \text{ x } \vec{v})$

7. $\vec{u}\text{x}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \text{ x } \vec{w} + \vec{v} \text{ x } \vec{w}$

8. $\|\vec{u} \text{ x } \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$ esta propiedad se puede presentar de otras formas, así:

$$\|\vec{u} \text{ x } \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$$

$$\|\vec{u} \text{ x } \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - (\|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\|\cos\theta)^2$$

$$\|\vec{u} \text{ x } \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - \|\overrightarrow{v_1}\|^2\,\|\overrightarrow{v_2}\|^2 cos^2\,\theta$$

$$\|\vec{u} \text{ x } \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2[1 - cos^2\,\theta]$$

$$\|\vec{u} \text{ x } \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 sen^2\,\theta$$

$$\|\vec{u} \text{ x } \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\ sen\,\theta$$

Esta última expresión permite calcular el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

El ángulo entre dos vectores se calcula con la expresión:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\,\|.\,\|\vec{v}\,\| \cos\theta$$

El volumen de un paralelepípedo sustentado por tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se puede determinar como sigue:

$$Volumen = \ |(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w}| \text{ (Valor absoluto)}$$

EJERCICIOS

1. Sean el vector $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{P_1P_2}$, con $P_1(3, 5, -2)$ y $P_2(-2, 3, -5)$, determinar la norma de $\overrightarrow{v_1}$
2. Sean el vector $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$, con $Q_1(2, -4, -2)$ y $Q_2(-4, 3, -1)$, determinar la norma de $\overrightarrow{v_1}$
3. Sea el vector $\vec{u} = (2, 4, 5)$, $\vec{v} = (4, 3, 6)$, $\vec{w} = (-2, -1, 3)$, determinar
   a) Determinar la norma de cada vector.
   b) Determinar la dirección de cada vector con respecto a cada eje.
   c) Calcular: $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
   d) Calcular: $2\vec{u}+3\vec{w}$
   e) Calcular: $2\vec{u}-3\vec{w}$
   f) Resolver: $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$
   g) Resolver: $2\vec{u}.3\vec{w}$
   h) Calcular: $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$, $\vec{u} \text{ x } \vec{w}$, $\vec{v} \text{ x } \vec{w}$
   i) Calcular ángulos entre: a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$, b) $\vec{u}$ y $\vec{w}$, c) $\vec{v}$ y $\vec{w}$
   j) Determinar área entre: a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$, b) $\vec{u}$ y $\vec{w}$, c) $\vec{v}$ y $\vec{w}$
   k) Determinar volumen formado por los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$