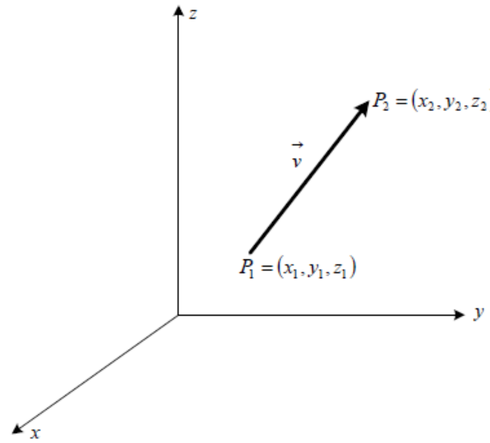
VECTORES EN R^3

Un vector en el espacio, (R^3), se representa por una terna ordenada de números reales, denotada de la siguiente manera:

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

Geométricamente, un vector en R^3, se representa como un segmento de recta dirigido un punto inicial P_1 hasta un punto final P_2. Este vector también se puede representar con el punto P_1 ubicado sobre el origen como punto de partida.



$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

Magnitud o norma de un vector:

Sea el vector $\vec{v} = (x, y, z)$, la magnitud o norma de $\vec{v}$ se denota $\|\vec{v}\|$ y se define como:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

y corresponde a la longitud del segmento de recta que definen al vector.

Para el vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$, la magnitud o norma se define como:

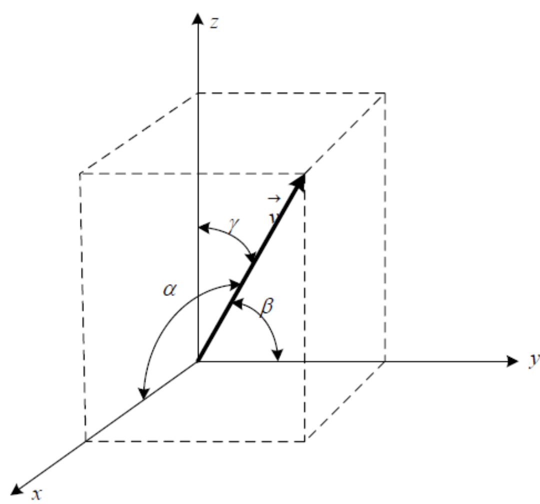
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y)^2 + (\ z_2 - z_1)^2}$$

Dirección y sentido de un vector:

El sentido de un vector $\vec{v} = (x, y, z)$, lo define la flecha dibujado sobre el lado final del segmento de la recta.

La dirección de un vector $\vec{v} = (x, y, z)$, está linea definida por la medida de los ángulos que forma la línea de acción del segmento de recta con cada uno de los ejes x, y, z.

Los ángulos α, β y γ se conocen como ángulos directores. Cada uno de estos ángulos se calcula directamente como se indica:



$$\cos\alpha = \frac{x}{\|\vec{v}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\|\vec{v}\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\|\vec{v}\|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Igualdad de vectores en R^3:

Dos vectores $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ si y solo si $x_1 = x_2$, $y_1 = \ y_2$ y $z_1 = \ z_2$

Operaciones:

1. **Suma:**

   Sean $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ dos vectores en R^3 tales que $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ entonces la suma de $\overrightarrow{v_1}$ con $\overrightarrow{v_2}$ denotada como $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, se define como:

$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = x_2 + x_1,\ y_2 + y_1,\ z_2 + z_1)$$

Propiedades de la suma:
Sean $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ vectores en R^3, se tiene las siguientes propiedades

1. $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}$ propiedad conmutativa

2. $(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) + \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3})$ propiedad asociativa

3. $\overrightarrow{v_1} + \vec{0} = \overrightarrow{v_1}$, existencia de un vector **neutro** $\vec{0} = (0, 0, 0)$

4. $\vec{v} + \overrightarrow{-v} = \vec{0}$, existencia de un vector $\overrightarrow{-v}$ llamado **inverso aditivo** de $\vec{v}$

2. **Multiplicación por escalar:**

   Si $\alpha, \beta \in R$ y $\vec{v} = (x, y, z)$ es un vector en R^3 entonces $\alpha\vec{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

   Propiedades:

   1. $\alpha(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \alpha\overrightarrow{v_1} + \alpha\overrightarrow{v_2}$

   2. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{v_1} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_1}$

   3. $\alpha(\beta\overrightarrow{v_1}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{v_1}$

   Nota: Cualquier vector en R^3, $\vec{v} = (x, y, z)$, se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{\imath} = (1,0,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$ y $\vec{k} = (0,0,1)$,

$$\vec{v} = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$
$$\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Producto escalar, producto punto o producto interno:

Sean $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ vectores en R^3 tales que $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ se define el **producto escalar** entre $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ como:

$$\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Propiedades del producto escalar:

1. $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_1}$

2. $\overrightarrow{v_1}.(\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_3}$

3. $(\alpha\,\overrightarrow{v_1}).(\beta\overrightarrow{v_2}) = \alpha\beta(\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2})$

4. Si $\overrightarrow{v_1} = (x, y, z)$, entonces $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_1} = (x, y, z).(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)$

   Esto significa que $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_1} = \|\vec{v}\|^2$ entonces $\|\vec{v}\|\sqrt{\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_1}}$

Producto vectorial o producto cruz:

Sean $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ vectores en R^3 tales que $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ se define el **producto vectorial** entre $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ como:

$$\overrightarrow{v_1}\text{x}\overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Propiedades del producto cruz:

1. El vector $\overrightarrow{v_1}\,\text{x}\,\overrightarrow{v_2}$ es perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ y a $\overrightarrow{v_2}$

2. El sentido del vector $\overrightarrow{v_1}\text{x}\overrightarrow{v_2}$ se obtiene con la regla de la mano derecha cerrando los dedos desde $\overrightarrow{v_1}$ hacia $\overrightarrow{v_2}$ mientras el pulgar indica la dirección del vector $\overrightarrow{v_1}\text{x}\overrightarrow{v_2}$

3. $\overrightarrow{v_1}\,\text{x}\,\overrightarrow{v_2} = -(\overrightarrow{v_2}\,\text{x}\,\overrightarrow{v_1})$

4. $\overrightarrow{v_1}\,\text{x}\,\overrightarrow{v_1} = 0$

5. Si $\overrightarrow{v_1} \parallel \overrightarrow{v_2}$, entonces $\overrightarrow{v_1}\,\text{x}\,\overrightarrow{v_2} = 0$

6. $\alpha_1\overrightarrow{v_1}\,\text{x}\,\alpha_2\overrightarrow{v_2} = \alpha_1\,\alpha_2\,(\overrightarrow{v_1}\,\text{x}\,\overrightarrow{v_2})$

7. $\overrightarrow{v_1}\text{x}(\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1}\,\text{x}\,\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}\,\text{x}\,\overrightarrow{v_3}$

8. $\|\overrightarrow{v_1}\,\text{x}\,\overrightarrow{v_2}\|^2 = \|\overrightarrow{v_1}\|^2\,\|\overrightarrow{v_2}\|^2 - (\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2})^2$ esta ultima propiedad es muy importante por lo que se puede presentar de otras formas, así:

$$\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|^2 = \|\overrightarrow{v_1}\|^2 \, \|\overrightarrow{v_2}\|^2 - (\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2})^2$$

$$\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|^2 = \|\overrightarrow{v_1}\|^2 \, \|\overrightarrow{v_2}\|^2 - (\|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\| \cos\theta)^2$$

$$\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|^2 = \|\overrightarrow{v_1}\|^2 \, \|\overrightarrow{v_2}\|^2 - \|\overrightarrow{v_1}\|^2 \, \|\overrightarrow{v_2}\|^2 cos^2\, \theta$$

$$\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|^2 = \|\overrightarrow{v_1}\|^2 \, \|\overrightarrow{v_2}\|^2 [1 - cos^2\, \theta]$$

$$\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|^2 = \|\overrightarrow{v_1}\|^2 \, \|\overrightarrow{v_2}\|^2 sen^2\, \theta$$

$$\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\| = \|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\| \, sen\, \theta$$

Esta última expresión permite calcular el área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$

El volumen de un paralepipedo sustentado por tres vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ se puede determinar como sigue:

$$Volumen = (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}).\overrightarrow{v_3}$$

EJERCICIOS

1. Sean el vector $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{P_1P_2}$, con $P_1(3, 5, -2)$ y $P_2(-2, 3, -5)$, determinar la norma de $\overrightarrow{v_1}$
2. Sean el vector $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{P_1P_2}$, con $P_1(2, -4, -2)$ y $P_2(-4, 3, -1)$, determinar la norma de $\overrightarrow{v_1}$
3. Sea el vector $\overrightarrow{v_1} = (2, 4, 5)$, $\overrightarrow{v_2} = (4, 3, 6)$, $\overrightarrow{v_3} = (-2, -1, 3)$, determinar
   a) Determinar la norma de cada vector.
   b) Determinar la dirección de cada vector con respecto a cada eje.
   c) Calcular: $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$
   d) Calcular: $2\overrightarrow{v_1}+3\overrightarrow{v_3}$
   e) Calcular: $2\overrightarrow{v_1}-3\overrightarrow{v_3}$
   f) Resolver: $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_3}$
   g) Resolver: $2\overrightarrow{v_1}.3\overrightarrow{v_3}$
   h) Calcular: $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3}$