CURVAS PLANAS Y ECUACIONES PARAMETRICAS

Hasta ahora, se ha visto que un ***lugar geométrico*** tiene una representación analítica, la cual es una sola ecuación que contiene dos variables. Ahora se estudiará la representación analítica de una curva utilizando dos ecuaciones, que se llaman ecuaciones ***paramétricas*** de la curva.

Definición de una curva plana: Si f y g son funciones continuas de t en un intervalo I, entonces a las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$se les llama **ecuaciones paramétricas** y se dice que t es el **parámetro**. Al conjunto de puntos (x, y) que se obtiene cuando t varía sobre el intervalo I se le llama la **gráfica** de las ecuaciones paramétricas. A las ecuaciones paramétricas y a la gráfica, juntas, se le llama una **curva plana**, que se denota por C.

Trazado de una curva

Ejercicio 1: Trazar la curva dada por las ecuaciones paramétricas

a) $x = t^2 - 4$ y $y = \frac{t}{2}, -2 \leq t \leq 3$
b) $x = 4t^2 - 8t$ y $y = 1 - t, \; -\frac{1}{2} \leq t \leq 2$
c) $x = 4t - 3$ y $y = 1 - t$

ALGUNAS ECUACIONES PARAMETRICAS

Lugar Geométrico	x	y
Circunferencia centro (0,0) y Radio r	r cos θ	r sen θ
Parábola $y^2 = 4px$	$p\,cot^2\theta$	2p cot θ
Parábola $x^2 = 4py$	2p tan θ	$2p\,tan^2\theta$
Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	a cos θ	b sen θ
Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	a sec θ	b tan θ
Cicloide	r (θ - sen θ)	r (1 - cos θ)

Nota: Cuando las ecuaciones de la circunferencia, de la elipse y de la hipérbola tienen centro en (h, k), estos valores aparecen sumados a las respectivas coordenadas (x, y)

ELIMINACION DEL PARAMETRO

1. Escribir las ecuaciones paramétricas respectivas
2. Despejar t de una de las dos ecuaciones
3. Sustituir t en la otra ecuación
4. Escribir la ecuación rectangular
5. Ajustar el dominio

Ejercicio 2: Eliminar el parámetro en el ejercicio 1.

Ejercicio 3: Dibujar la curva representada por $x = 3\,cos\theta$ y $y = 4\,sen\theta$, eliminar el parámetro y hacer el bosquejo de la curva rectangular.

Ejercicio 4. Eliminar parámetros y escribir la ecuación rectangular de:

1. $x = 6\cos\theta$ y $y = 5\,sen\theta$
2. $x = 2 + 3\cos\theta$ y $y = 3 + 4\,sen\theta$
3. $x = -3 + 6\cos\theta$ y $y = 3 + 5\,sen\theta$
4. $x = 5\cos\theta$ y $y = 5\,sen\theta$
5. $x = 2 + 3\cos\theta$ y $y = 3 + 3\,sen\theta$
6. $x = 3\tan\theta$ y $y = \frac{3}{2}\tan^2\theta$
7. $x = 2 + 3\tan\theta$ y $y = 3 + \frac{3}{2}\tan^2\theta$
8. $x = \frac{3}{2}\cot^2\theta$ y $y = 3\cot\theta$
9. $x = -2 + \frac{3}{2}\cot^2\theta$ y $y = 2 + 3\cot\theta$
10. $x = 3\sec\theta$ y $y = 2\tan\theta$
11. $x = 4\sec\theta$ y $y = 5\tan\theta$
12. $x = 4(\theta - sen\,\theta)$ y $y = 4(1 - \cos\theta)$

Ejercicio 5. Escribir las ecuaciones paramétricas de:

1. Círculo: centro: (0, 0); radio: 5
2. Círculo: centro: (2, 1); radio: 4
3. Parábola: vértice: (0,0) y directriz: y = -3
4. Parábola: Foco: (5,2) y directriz: x = - 1
5. Elipse: centro: (0, 0); un vértice (5, 0) y un foco (4, 0)
6. Elipse: vértices (4, -3) y (4, 7); focos (4, -1) y (4, 5)
7. Hipérbola: vértices: (± 4, 0); focos (± 5, 0)