METODOS DE INTEGRACION IV

FRACCIONES PARCIALES

Una función racional es una función de la forma

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

En la que *f(x)* y *g(x)* son polinomios. Si el frado de *f(x)* es menor que el de *g(x)*, *F(x)* se denomina fracción **propia**, en caso contrario *F(x)* se denomina fracción **impropia**.

Una fracción racional impropia se puede expresar como la suma de un polinomio con una fracción propia. Por ejemplo

$$\frac{x^2}{x+1} = x - \frac{x}{x+1}$$

Una fracción racional propia se puede expresar como la suma de fracciones simples cuyos denominadores son de la forma $(ax + b)^n$ y $(ax^2 + bx + c)^n$, donde n es un numero entero positivo. Teniendo en cuenta la forma de los factores del denominador de estas fracciones, se pueden presentar cuatro casos.

CASO I. FACTORES LINEALES DISTINTOS

A cada factor lineal, $ax + b$, del denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\frac{A}{ax+b}$, donde A es una constante a determinar.

CASO II. FACTORES LINEALES IGUALES

A cada factor lineal, $ax + b$, que aparezca n veces en el denominador de una fracción propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Donde los numeradores son constantes a determinar.

CASO III. FACTORES CUADRATICOS DISTINTOS

A cada factor cuadrático, $ax^2 + bx + c$, que figure en el denominador de una fracción propia, le corresponde una fracción de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Donde A y B son constantes a determinar.

CASO IV. FACTORES CUADRATICOS IGUALES

A cada factor cuadrático irreducible, $ax^2 + bx + c$, que se repite n veces en el denominador de una fracción propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Donde A y B son constantes a determinar.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$

a) Factorizar el denominador: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ por lo que, para quitar denominadores, la fracción se puede escribir

$$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3}$$

$$1 = A(x + 3) + B(x - 3) = Ax + 3A + Bx - 3B$$

$$1 = (A + B)x + (3A - 3B)$$

b) Determinar el valor de las constantes A y B, para ello se identifican los coeficientes de igual potencia de x y se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido.

$$A + B = 0, \qquad 3A - 3B = 1$$

$$A = -B, \quad A - B = \frac{1}{3} \Rightarrow 2A = \frac{1}{3} \Rightarrow A = -B = \frac{1}{6}$$

c) Escribir la integral con sus fracciones equivalentes y resolverlas

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \int \frac{\frac{1}{6}dx}{x-3} + \int \frac{-\frac{1}{6}dx}{x+3} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6}ln|x-3| - \frac{1}{6}ln|x+3| + C = \frac{1}{6}ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

2. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$

a) Factorizar el denominador: $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$ por lo que, para quitar denominadores, la fracción se puede escribir

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

$$2x + 1 = A(x-2) + B(x-3) = Ax - 2A + Bx - 3B$$

$$2x + 1 = (A+B)x + (-2A - 3B)$$

b) Determinar el valor de las constantes *A* y *B*, para ello se identifican los coeficientes de igual potencia de *x* y se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido

$$\Rightarrow 2 = A + B, \qquad 1 = -2A - 3B$$

Resolviendo las ecuaciones se obtiene que $A = 7, \quad B = -5$

c) Escribir la integral con sus fracciones equivalentes y resolverlas

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{7}{x-3}dx + \int \frac{-5}{x-2}dx$$

$$= 7ln|x-3| - 5ln|x-2| + C = ln\left|\frac{(x-3)^7}{(x-2)^5} + C\right|$$

3. $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

a) Factorizar el denominador $x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$ por lo que, para quitar denominadores, la fracción se puede escribir

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$5x^2+20x+6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

$$5x^2+20x+6 = Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx$$

$$5x^2+20x+6 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

b) Determinar el valor de las constantes *A*, *B* y *C* para ello se identifican los coeficientes de igual potencia de *x* y se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido

$$5 = A + B, \quad 20 = 2A + B + C, \quad A = 6$$

Resolviendo las ecuaciones se obtiene que $A = 6, \quad B = -1, \quad C = 9$

c) Escribir la integral con sus fracciones equivalentes y resolverlas

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx = \int \frac{6}{x}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx + \int \frac{9}{(x+1)^2}dx$$

$$= 6ln|x| - ln|x+1| - \frac{9}{x+1} + C$$

$$= ln\left|\frac{x^6}{x+1}\right| - \frac{9}{x+1} + C$$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

a) Factorizar el denominador $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2+2)(x^2+1)$ por lo que, para quitar denominadores, la fracción se puede escribir

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$x^3+x^2+x+2 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+2) =$$

$$x^3 + x^2 + x + 2 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + 2D =$$

$$x^3 + x^2 + x + 2 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (A + 2C)x + (B + 2D)$$

b) Determinar el valor de las constantes *A*, *B*, *C* y *D* para ello se identifican los coeficientes de igual potencia de *x* y se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido

$$1 = A + C, \qquad 1 = B + D \qquad 1 = A + 2C, \qquad 2 = B + 2D$$

Resolviendo las ecuaciones se obtiene que $A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 1$

c) Escribir la integral con sus fracciones equivalentes y resolverlas

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{x}{x^2 + 2} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2 + 2| + arc\tan x + C$$

6. $\displaystyle\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx$

a) La fracción se puede escribir

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 2)^3}$$

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (Ax + B)(x^2 + 2)^2 + (Cx + D)(x^2 + 2)$$
$$= Ex + F$$

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = Ax^5 + 4Ax^3 + 4Ax + Bx^4 + 4Bx^2 + 4B$$
$$+Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + 2D + Ex + F$$

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = Ax^5 + Bx^4 + (4A{+}C)x^3 + (4B + D)x^2$$
$$+(4A + 2C + E)\boldsymbol{x} + (4B + 2D + F)$$

b) Determinar el valor de las constantes *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F* para ello se identifican los coeficientes de igual potencia de *x* y se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido

$$1 = A, \qquad -1 = B, \qquad 4 = 4A + C, \qquad -4 = 4B + D,$$

$$8 = 4A + 2C + E, \qquad -4 = 4B + 2D + F$$

Resolviendo las ecuaciones se obtiene que

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 4, \quad F = 0$$

c) Escribir la integral con sus fracciones equivalentes y resolverlas

$$\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} dx$$

$$= \int \frac{x-1}{x^2+2} dx + \int \frac{4x}{(x^2+2)^3} dx$$

$$= \int \frac{x}{x^2+2} dx - \int \frac{dx}{x^2+2} + 4\int \frac{x}{(x^2+2)^3} dx$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2+2| - \frac{\sqrt{2}}{2} arc\tan \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C$$

EJERCICIOS

1. $\int \frac{dx}{x^2-4}$
2. $\int \frac{xdx}{x^2-x-6}$
3. $\int \frac{x}{x^2-7x+6} dx$
4. $\int \frac{x}{x^2-6x+9} dx$
5. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx$
6. $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x} dx$

7. $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx$

8. $\int \frac{x^2}{x^2 + 6x + 9} dx$

9. $\int \frac{2x^3}{x^4 + 7x^2 + 10} dx$

10. $\int \frac{2x^3 + x^2 + 4}{x^4 + 8x^2 + 16} dx$

11. $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 6x + 15}{(x^2 + 5)(x^2 + 2x + 3)} dx$

12. $\int \frac{x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)(x^3 + 1)} dx$

13. $\int \frac{8x^3 + 13x}{x^4 + 4x^2 + 4} dx$

14. $\int \frac{x^3 + 3}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$

15. $\int \frac{x^2 + 3}{x^4 + 4x^3 + 4x^2} dx$