METODOS DE INTEGRACION III

SUSTITUCIONES TRIGONOMETRICAS

El método de sustitución trigonométrica es utilizado cuando se tiene integrales que contengan los radicales

$$\sqrt{a^2-u^2},\qquad \sqrt{a^2+u^2},\qquad \sqrt{u^2-a^2}$$

El propósito de la sustitución trigonométrica es eliminar los radicales, para ello es muy frecuente el uso de las siguientes sustituciones.

Para	Sustituir por	Para obtener
$\sqrt{a^2-b^2u^2}$	$u=\frac{a}{b}sen\,\theta$	$a\sqrt{(1-sen^2\theta)}=a\cos\theta$
$\sqrt{a^2+b^2u^2}$	$u=\frac{a}{b}tan\,\theta$	$a\sqrt{(1+tan^2\theta)}=a\sec\theta$
$\sqrt{b^2u^2-a^2}$	$u=\frac{a}{b}sec\,\theta$	$a\sqrt{(sec^2\theta-1)}=a\tan\theta$

En cada caso se obtiene una expresión en términos de la variable θ, por lo que se hace necesario retornar a la variable original haciendo uso de las identidades trigonométricas pitagóricas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}},\quad a=3,\qquad b=1,\quad u=x$

Haciendo $x=3\tan\theta$ se tiene que $dx=3\sec^2\theta$ y $\sqrt{9+x^2}=3\sec\theta$, entonces,

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}=\int\frac{3\sec^2\theta}{9\tan^2\theta\;3\,sec\,\theta}d\theta=\frac{1}{9}\int\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta=\frac{1}{9}\int sen^{-2}\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{9\,sen\,\theta}+C=-\frac{\sqrt{9+x^2}}{9x}$$

2. $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx,\quad a=3,\qquad b=1,\quad u=x$

Haciendo $x = 3\sec\theta$ se tiene que $dx = 3\sec\theta\tan\theta$, por lo que se supone que
$\sqrt{x^2-9} = 3\tan\theta$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx = \int \frac{9\,sec^2\,3\sec\theta\tan\theta}{3\tan\theta}d\theta = 9\int sec^3\theta\,d\theta =$$

$$9\int sec^2\theta\ \sec\theta\,d\theta = 9\int (1+tan^2\theta)\sec\theta\,d\theta =$$

$$9\int \sec\theta\,d\theta + 9\int tan^2\theta\ \sec\theta\,d\theta =$$

$$9\ln|\sec\theta+\tan\theta| + 9\int tan^2\theta\ \sec\theta\,d\theta \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{u = \tan\theta \qquad dv = \sec\theta\tan\theta\ d\theta}$$

$$\boldsymbol{du = sec^2\,\theta \qquad v = \sec\theta}$$

$$9\int sec^3\theta\,d\theta = 9\ln|\sec\theta+\tan\theta| + 9\sec\theta\tan\theta - 9\int sec^3\theta\,d\theta$$

$$\int sec^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}(\ln|\sec\theta+\tan\theta| + \sec\theta\tan\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right| + \frac{x\sqrt{x^2-9}}{9}\right) + C$$