

METODOS DE INTEGRACION II**INTEGRALES TRIGONOMETRICAS**

Identidades que se usan en la solución de algunas integrales trigonométricas

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
6. $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
7. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$
8. $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$
9. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$
10. $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2}x$
11. $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x$
12. $1 \pm \sin x = 1 \pm \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$

ESTRATEGIAS PARA RESOLVER INTEGRALES CON SENOS Y COSENOS

1. Si la potencia del seno es impar y positiva, se conserva un factor seno y se pasan los demás a cosenos, luego se desarrolla la integral

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx &= \int (\sin^2 x)^k \cos^n x \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx \end{aligned}$$

2. Si la potencia del coseno es impar y positiva, se conserva un factor coseno y se pasan los demás a senos, luego se desarrolla la integral

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx &= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int \sin^m x (1 - \cos^2 x)^k \cos x dx \end{aligned}$$

3. Si la potencia del seno y del coseno son pares y positivas, se usan las identidades 4 y 5 para convertir el integrando en uno con potencias impares y se aplica alguno de los dos casos anteriores.

EJERCICIOS RESUELTOS

$$1. \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$2. \int \cos^2 5x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 10x) \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\sin 5x + C$$

$$3. \int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx$$

$$= \int \sin x \, dx - 2 \int \cos^2 x \sin x \, dx + \int \cos^4 x \sin x \, dx \\ = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

$$4. \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\ = \int \sin^2 x \cos x \, dx - \int \sin^4 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

$$5. \int \sin^4 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right]^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 \, dx \\ = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \\ = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) \, dx \\ = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

EJERCICIOS

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \cos^2 x dx$

2. $\int \cos^5 x dx$

3. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$

4. $\int \cos^4 2x \sin^3 2x dx$

5. $\int \sin^3 \frac{x}{3} dx$

6. $\int \sin 3x \sin 2x dx$

7. $\int \tan^4 x dx$

8. $\int \tan^3 x dx$

9. $\int \sec^4 2x dx$

10. $\int \tan^2 x \sec^3 x dx$

11. $\int \cot^4 x dx$

12. $\int \cot^4 2x dx$

$$13. \int \cot^5 x \, dx$$

$$14. \int \cot^3 x \csc^5 x \, dx$$

$$10. \int \tan^2 3x \sec^3 3x \, dx$$