METODOS DE INTEGRACION I

INTEGRACION POR PARTES

Con este método es posible resolver una gran cantidad de integrales que no se pueden resolver de manera inmediata o por sustitución simple.

Sean *u* y *v* dos funciones dependientes de la variable *x*; es decir, $u = f(x)$, $v = g(x)$, la derivada del producto de estas dos funciones se puede representar como

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Integrando los dos miembros se tiene que:

$$\int (uv)' dx = \int (u'v + uv')dx$$

$$uv = \int (u'v)dx + \int (uv')dx$$

$$\int (uv')dx = uv - \int (u'v)dx$$

Que es equivalente a decir que:

$$\boldsymbol{\int u\, dv = uv - \int v\, du}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Nota 1. Las funciones polínomicas, logarítmicas y las inversas trigonométricas, generalmente se eligen como *u*, mientras que las funciones exponenciales y trigonométricas del tipo *sen x* y *cos x* se eligen como *dv*. Si la integral tiene solo un logaritmo o un “arco”, entonces se integra por partes haciendo *dv* = *dx*

Determinar las siguientes integrales:

1. $\int x\, senx\ dx$

$$u = x \qquad\qquad dv = sen\, x\, dx$$

$$\text{Derivando} \downarrow \qquad\qquad \text{Integrando} \downarrow$$

$$du = dx \qquad\qquad v = -cos\, x$$

$$\int x\, senx\ dx = -x\cos x - \int -cosx\, dx$$

$$\int x\, senx\ dx = -x\cos x + senx + C$$

2. $\int \ln|x| \; dx$

$$u = \ln|x| \qquad\qquad dv = \; dx$$

Derivando $\downarrow$ Integrando $\downarrow$

$$du = \tfrac{1}{x} dx \qquad\qquad v = x$$

$$\int \ln|x| \; dx = \; x \ln|x| \; - \int x \left(\frac{1}{x}\right) \; dx$$

$$\int \ln|x| \; dx = \; x \ln|x| \; - x + C$$

3. $\int xe^x \; dx$

$$u = x \qquad\qquad dv = e^x dx$$

Derivando $\downarrow$ Integrando $\downarrow$

$$du = dx \qquad\qquad v = e^x$$

$$\int xe^x \; dx = \; x\, e^x \; - \int e^x \, dx$$

$$\int xe^x \; dx = \; x\, e^x \; - e^x = e^x(x - 1) + C$$

4. $\int \; x^2 \; \ln|x| \; dx$

$$u = \ln|x| \qquad\qquad dv = x^2 \; dx$$

Derivando $\downarrow$ Integrando $\downarrow$

$$du = \tfrac{1}{x} dx \qquad\qquad v = \tfrac{1}{3} \, x^3$$

$$\int x^2 \; \ln|x| \; dx = \frac{1}{3} \, x^3 \ln|x| \; - \int \frac{1}{3} \, x^3 \left(\frac{1}{x}\right) \; dx$$

$$\int \ln|x| \; dx = \frac{1}{3} \, x^3 \ln|x| \; - \frac{1}{3} \int \; x^2 \, dx$$

$$\int \ln|x| \; dx = \frac{1}{3} \, x^3 \ln|x| \; - \frac{1}{9} x^3 = \frac{1}{3} x^3 \left(\ln|x| - \frac{1}{3}\right) + C$$

5. $\displaystyle\int \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx$

$$u = \ln|x| \qquad\qquad dv = \tfrac{1}{x^2}\,dx$$

$$du = \tfrac{1}{x}dx \qquad\qquad v = -\tfrac{1}{x}$$

$$\int \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln|x| - \int -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\int \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln|x| + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln|x| + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(\ln|x| + 1) + C$$

6. $\displaystyle\int arc\ sen\ x\ \ dx$

$$u = arc\ sen\ x \qquad\qquad dv = dx$$

$$du = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad\qquad v = x$$

$$\int arc\ sen\ x\ \ dx = x\ arc\ sen\ x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int arc\ sen\ x\ \ dx = x\ arc\ sen\ x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Nota 2. Si al integrar por partes se elige $\boldsymbol{u = x^n}$**,** el proceso se debe repetir ***n*** **veces**

7. $\displaystyle\int x^3\,e^x\ dx$

$$u = x^3 \qquad\qquad dv = e^x dx$$

$$du = 3x^2dx \qquad\qquad v = e^x$$

$$\int x^3\,e^x\ dx = x^3\,e^x - \int 3x^2e^xdx$$

$$\int x^3\,e^x\ dx = x^3\,e^x - 3\left(x^2\,e^x - \int 2xe^xdx\right)$$

$$\int x^3\,e^x\ dx = x^3\,e^x - 3\left[x^2\,e^x - 2\left(x\,e^x - \int e^xdx\right)\right]$$

$$\int x^3\,e^x\ dx = x^3\,e^x - 3[x^2\,e^x - 2(x\,e^x - e^x)] + C$$

$$\int x^3\, e^x\ dx = x^3\, e^x - 3x^2\, e^x + 6x\, e^x - 6e^x + C$$

$$\int x^3\, e^x\ dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

8. $\int x^2\ sen\ 3x\ \ dx$

$$u = x^2 \qquad\qquad dv = sen\ 3x\ dx$$

$$du = 2x\ dx \qquad\qquad v = -\tfrac{1}{3}\cos 3x$$

$$\int x^2\ sen\ 3x\ \ dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x - \int -\frac{1}{3}\cos 3x\ \ (2x\ dx)$$

$$\int x^2\ sen\ 3x\ \ dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\int x \cos 3x\ \ \ dx$$

$$\int x^2\ sen\ 3x\ \ dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\ x\ sen\ 3x - \frac{1}{3}\right)\int sen\ 3x\ \ dx$$

$$\int x^2\ sen\ 3x\ \ dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}\ x\ sen\ 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C$$

Nota 3. Si al integrar por partes se obtiene en el segundo miembro la integral que hay que calcular, se resuelve manejando términos como en una ecuación.

9. $\int e^x\ sen\ x\ \ dx$

$$u = sen\ x \qquad\qquad dv = e^x\ dx$$

$$du = \cos x\, dx \qquad\qquad v = e^x$$

$$\int e^x\ sen\ x\ \ dx = e^x sen\ x\ - \int e^x \cos x\ \ dx$$

$$u = cos\ x \qquad\qquad dv = e^x\ dx$$

$$du = -\text{sen}\ \ x\, dx \qquad\qquad v = e^x$$

$$\int e^x\ sen\ x\ \ dx = e^x sen\ x\ - e^x\ cos\ x - \int e^x\ \text{sen}\, x\ \ dx$$

$$2\int e^x\ sen\ x\ \ dx = e^x sen\ x\ - e^x\ cos\ x$$

$$\int e^x\ sen\ x\ \ dx = \frac{e^x sen\ x\ - e^x\ cos\ x}{2} = \frac{1}{2}\ e^x(sen\ x\ -\ cos\ x) + C$$

10. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

$$u = \ln x \qquad dv = \frac{1}{x}\, dx$$

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \ln x$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = ln^2\, x - \int \frac{1}{x}\ \ln x\, dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = ln^2\, x - \int \frac{\ln x}{x}\, dx$$

$$2\int \frac{\ln x}{x}\, dx = ln^2\, x$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2} ln^2\, x + C$$

EJERCICIOS

1. $\int e^{3x}\, sen\ x\ \ dx$

2. $\int e^{3x}\, cos\ 2x\ \ dx$

3. $\int e^{3x}\, (x^3 + 5x^2 - 2)\ \ dx$

4. $\int arco\ tan\ \ dx$

5. $\int x^2 arco\ tan\ \ dx$

6. $\int\ x^2\ \ \ln|2x|\ \ dx$

7. $\int\ sen\ x\ \ \ln|x|\ \ dx$

8. $\int\ sen\ x\ \ \ln|cos\ x|\ \ dx$

9. $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$

10. $\int sen^2 x\, dx$

11. $\int sen^3 x\, dx$

12. $\int sen^4 x\, dx$

13. $\int cos^5 x\, dx$

14. $\int sen^6 x\, dx$

15. $\int sen^7 x\, dx$