CALCULO INTEGRAL

LA ANTIDERIVADA

Así como las operaciones matemáticas de la adición, la multiplicación y la potenciación tienen sus inversas en la sustracción, la división y la radicación, la diferenciación tiene su inversa en la antiderivacion o antidiferenciacion.

El proceso de antiderivar consiste en encontrar una función *F(x)* de la cual su derivada es f(x). Es decir,

Si $f(x) = 4x^3$, es la derivada de *F(x)*, entonces $F(x) = x^4 + C$, es la función primitiva de *f(x)* y *C* es una constante que hace que la primitiva de f(x) sea una familia de funciones similares.

Ejemplo 1. Si *F(x)*, *G(x)* y *H(x)* son funciones definidas por
$F(x) = 3x^3 + 4x^2 + 6$
$G(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$
$H(x) = 3x^3 + 4x^2 + 9$

Al determinar la derivada de cada función se tiene que

$$f'(x) = g'(x) = h'(x) = 6x^3 + 8x$$

Cuando se calcula la antiderivada de estas funciones se tiene la siguiente familia de primitivas:

$$I(x) = 2x^3 + 4x + C = F(x) = G(x) = H(x)$$

Observe que la constante *C* puede ser equivalente a 6 para *F(x)*, - 5 para *G(x)* o 9 para *H(x).*

Generalizando, se tiene que si se considera la función *F(x)* como una antiderivada de la función *f*(x) en el intervalo *I*, de modo que

F'(x) = f(x)

Entonces *G(x)* es una función definida por

$$G(x) = F(x) + C$$

En donde *C* es una constante arbitraria, lo que sugiere que la familia de primitivas es infinita y la diferencia entre una primitiva y otra es el valor de la constante *C*

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

Integración indefinida:

La operación de calcular la familia de primitivas de una función f(x) se llama **Integración indefinida,** y se denota con el signo $\int$ llamado integral. Este proceso se representa así:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

En donde *f(x)* se denomina integrando, *dx* indica la variable de integración y *C* corresponde a la constante de integración. Esto significa que *F*(x) es una primitiva de *f*(x) en el intervalo *I*.

FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

Formulas de derivación	**Formulas de integración**
1. $\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\, dx = C$
2. $\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int dx = 1 + C$
3. $\frac{d}{dx}[ax] = a$	$\int a\, dx = a \int dx = a + C$
4. $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
5. $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
6. $\frac{d}{dx}[af(x)] = a\frac{d}{dx}[f(x)]$	$\int a\, f(x)dx = a \int f(x)dx$
7. $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
8. $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
9. $\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
10. $\frac{d}{dx}[sen\ x] = \cos x$	$\int \cos x\, dx = sen\ x + C$
11. $\frac{d}{dx}[cos\ x] = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -cos\ x + C$
12. $\frac{d}{dx}[tan\ x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = tan\ x + C$
13. $\frac{d}{dx}[cot\ x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -cot\ x + C$
14. $\frac{d}{dx}[sec\ x] = \sec \mathrm{x} \tan x$	$\int \sec \mathrm{x} \tan x\, dx = sec\ x + C$
15. $\frac{d}{dx}[csc\ x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\, dx = -csc\ x + C$

www.jvcontrerasj.com

www.jvcontrerasj.3a2.com

A la hora de aplicar cualquier regla de integración, es bueno tener en cuenta que la relación entre la derivada y la integral puede configurar dos importantes **reglas de oro** que se deben tener presentes por encima de cualquier propiedad de estas operaciones.

$\int \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$ *La integración es la* inversa *de la derivación.*

$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}[\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}] = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *La derivación es la* inversa *de la integración*

INTEGRACION INMEDIATA

Ejercicios resueltos

Resolver de forma inmediata (aplicando formulas) las siguientes integrales:

FORMULAS 3 – 6

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

2. $\int 5\,x^4 dx = 5\int x^4\,dx = \frac{5x^5}{5} + C = x^5 + C$

3. $\int (4x^3 + 3x^2 - 2x + 3)dx = 4\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - 2\int x\,dx + \int 3\,dx$
   $= x^4 + x^3 - x^2 + x + C$

4. $\int (3x+2)^2\,dx = \int (9x^2 + 12\,x + 4)\,dx = 3x^3 + 6x^2 + 4x + C$

5. $\int \frac{2}{x^4}\,dx = 2\int x^{-4} dx = \frac{2x^{-3}}{-3} + C = -\frac{2}{x^3} + C$

6. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

7. $\int 3x^2\,(6x^3 + x^2 + 2x - 4)dx = 18\int x^5\,dx + 3\int x^4 dx + 6\int x^3\,dx - 12\int x^2 dx$
   $= 3x^6 + \frac{3}{5}x^5 + \frac{3}{2}\,x^4 - 4x^3 + C$

8. $\int \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx = 3\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 6\sqrt{x} + C$

9. $\int 3\sqrt{x}\,dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{x^3} + C$

10. $\int -\frac{2}{\sqrt{x}}\, dx = -2\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = -4\sqrt{x} + C$

INTEGRACION POR SUSTITUCION

La sustitución de una expresión *f(x)* determinada por una variable f(u), es uno de los métodos más utilizados para resolver integrales de forma directa pero ya no tan inmediatas como los ejercicios desarrollados arriba.

Ejercicios resueltos

Resolver por sustitución las siguientes integrales:

FORMULAS 3 – 6

1. $\int x\,(x^2+2)^8\, dx$ se hace $u = x^2 + 2$, se calcula $\frac{du}{dx} = 2x$, se despeja *dx:* $\frac{du}{2x} = dx$, se sustituye en la integral inicial,

   $\int x\,(x^2+2)^8\, dx = \int x\, u^8 \frac{du}{2x}$, se cancelan las expresiones que se pueden cancelar,

   $\int x\,(x^2+2)^8\, dx = \int x\, u^8 \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^8\, du$, se resuelve la integral aplicando alguna regla básica

   $\int x\,(x^2+2)^8\, dx = \int x\, u^8 \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^8\, du = \frac{9}{2}u^9 + C$ y se hace de nuevo el cambio de variable.

   $$\int x\,(x^2+2)^8\, dx = \int x\, u^8 \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^8\, du = \frac{9}{2}u^9 + C = \frac{9}{2}\,(x^2+2)^9 + C$$

2. $\int (2x+4)\,(x^2+4x)^8 dx \quad u = x^2 + 4x, \quad \frac{du}{dx} = 2x+4, \quad \frac{du}{2x+4} = dx$

   $\int (2x+4)\,(x^2+4x)^8 dx = \int u^8\, du = \frac{1}{9}\,u^9 + C = \frac{1}{9}\,(x^2+4x)^9 + C$

3. $\int (4x+5)\,(2x^2+5x)^{10} dx \quad u = 2x^2 + 5x, \quad \boldsymbol{du = (4x+5)dx}$

   $\int (2x^2+5x)^{10}(4x+5)\, dx = \int u^{10}\, du = \frac{1}{11}\,u^{11} + C = \frac{1}{11}\,(2x^2+5x)^{11} + C$

   Si se puede ver directamente el término equivalente a ***du***, se puede hacer la sustitución en forma más directa como se hizo en este ejercicio.

4. $\int \frac{6x^2+1}{(4x^3+2x)^9}dx \quad u = 4x^3 + 2x, \quad du = (12x^2 + 2)dx, \quad \boldsymbol{\frac{du}{2} = (6x^2 + 1)dx}$

$\int \frac{6x^2+1}{(4x^3+2x)^9}dx = \frac{1}{2}\int u^{-9}\,du = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,u^{-8} + C = -\frac{1}{16(4x^3+2x)^8} + C$

En este caso fue necesario factorizar la expresión $12x^2 + 2 = 2(6x^2 + 1)$ y dividir a *du* en 2

5. $\int (x^3+2)^5 3x^2 dx \quad u = x^3 + 2, \quad du = 3x^2 dx$
$\int (x^3+2)^5 3x^2 dx = \int u^5\,du = \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{6}(x^3+2)^6 + C$

6. $\int (x^3+2)^5 6x^2 dx \quad u = x^3 + 2, \quad du = 3x^2 dx, \quad 2du = 6x^2 dx$
$\int (x^3+2)^5 6x^2 dx = 2\int u^5\,du = 2\,\frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{3}\,(x^3+2)^6 + C$

7. $\int 3x^2\sqrt{x^3+2}\,dx \quad u = x^3 + 2, \quad du = 3x^2 dx$
$\int 3x^2\sqrt{x^3+2}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\,\sqrt{(x^3+2)^3} + C$

8. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx \quad u = x^3 + 2, \quad du = 3x^2 dx$

$\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx = \int u^{-\frac{1}{2}}du = 2\,u^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x^3+2} + C$

9. $\int x\sqrt{2x^2}\,dx \quad u = 2x^2, \quad du = 4x\,dx$

$\int x\sqrt{2x^2}\,dx = 4\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{8}{3}\,\sqrt{(2x)^3} + C$

10. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2}}\,dx \quad u = 2x^2, \quad du = 4x\,dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2}}\,dx = 4\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = 8u^{\frac{1}{2}} + C = 8\sqrt{2x^2} + C$

FORMULAS 7 – 9

1. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$

2. $\int e^x\,dx = e^x + C$

3. $\int \frac{dx}{x+5}$ $\quad u = x+5, \quad du = dx,$ entonces $\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{du}{u} = \ln|x+5| + C$

4. $\int \frac{dx}{4-x}$ $\quad u = 4 - x, \quad du = -dx,$ entonces $\int \frac{dx}{4-x} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|4-x| + C$

5. $\int \frac{dx}{2x+5}$ $\quad u = 2x+5, \quad du = 2dx,$ entonces $\frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|x+5| + C$

$$= \ln\left|(2x+5)^{\frac{1}{2}}\right| + C = ln\sqrt{|(2x+5)|} + C$$

6. $\int \frac{x^2}{3-2x^3}dx \quad u = 3-2x^3, \quad du = -6x^2dx$

$\int \frac{x^2}{3-2x^3}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{6}\, ln\,|3-2x^3| + C = ln\frac{c}{\sqrt[6]{(3-2x^3)}}$

7. $\int \frac{x+3}{x+1}\,dx$ resolviendo la división indicada se tiene que $\int \frac{x+3}{x+1}\,dx = \int \left(1+\frac{2}{x+1}\right)dx$

$$= \int dx + 2\int \frac{dx}{x+1} = x + 2ln|x+1| + C = x + ln(x+1)^2 + C$$

8. $\int e^{3x}\,dx \quad u = 3x, \quad du = 3dx,$ entonces, $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}\,e^{3x} + C$

9. $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$

10. $\int a^{3x}\,dx \quad u = 3x, \quad du = 3dx,$ entonces, $= \int a^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int a^u du = \frac{1}{3}\frac{a^{3x}}{\ln a} + C$

FORMULAS 10 – 15

1. $\int sen\,(5x)dx \quad u = 5x, \quad du = 5dx,$ entonces $\int sen\,(5x)dx = \frac{1}{5}\int sen\,u\,du$

$$= -\frac{1}{5}\cos(5x) + C$$

2. $\int sen\left(\frac{1}{2}x\right)dx \quad u = \frac{1}{2}x, \quad du = \frac{1}{2}dx,$ entonces $\int sen\left(\frac{1}{2}x\right)dx = 2\int sen\,u\,du$

$$= -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + C$$

3. $\int sen^3x\cos x\,dx \quad u = sen\,x, \quad du = \cos x\,dx,$ entonces,

$$\int sen^3x\cos x\,dx = \int u^3du = \frac{1}{4}\,sen^4 + C$$

4. $\int sec^2(3x)\,dx \quad u = 3x, \quad du = 3dx$, entonces,

$$\int sec^2(3x)\,dx = \frac{1}{3}\tan(3x) + C$$

5. $\int \sec(2x)\,tan(2x)dx = \frac{1}{2}sec(2x) + C$

6. $\int csc^2(3x)\,dx = -\frac{1}{3}\,cot(3x) + C$

7. $\int \csc(2x)\,cot(2x)dx = -\frac{1}{2}csc(2x) + C$

8. $\int \frac{sen\,x}{cos^2\,x}\,dx = \int \tan x \sec x\,dx = \sec x + C$

9. $\int \mathrm{x}\cos x^2\,dx \quad u = x^2, \quad du = 2xdx$, entonces,

$$\int \mathrm{x}\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\,sen\,x^2 + C$$

10. $\int e^x \cos e^x\,dx = sen\,e^x + C$

OTRAS FORMULAS DE INTEGRACION

16. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$

17. $\int \cot u\;du = \ln|\mathrm{sen}\,u| + C$

18. $\int \sec u\;du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

19. $\int \csc u\;du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

20. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc\;sen\;\frac{u}{a} + \mathrm{C}$

21. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}arc\;tan\;\frac{u}{a} + \mathrm{C}$

22. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}arc\;sec\;\frac{u}{a} + \mathrm{C}$

23. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

24. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

25. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

26. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

27. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\ du = \frac{1}{2}\ u\ \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2}\ a^2\ arc\ sen\ \frac{u}{a} + C$

28. $\int \sqrt{u^2 + a^2}\ du = \frac{1}{2}\ u\sqrt{u^2 + a^2}\ + \frac{1}{2}\ a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

29. $\int \sqrt{u^2 - a^2}\ du = \frac{1}{2}\ u\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2}\ a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

FORMULAS 16 – 19

1. $\int \tan x\ dx = \int \frac{sen\ x}{\cos x}\ dx \quad u = \cos x, \quad du = -sen\ x\ dx,$ entonces,

$$\int \frac{sen\ x}{\cos x}\ dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|\cos x| + C = \ln(\cos x)^{-1} + C = ln|\sec x| + C$$

2. $\int \tan(3x)\ dx \quad u = 3x, \quad du = 3\ dx,$ entonces,

$$\int \tan(3x)\ dx = \frac{1}{3} \int \tan u\ du = \frac{1}{3} ln\ |\sec(3x)| + C$$

3. $\int \sec x\ \ dx = \int \frac{\sec x\ (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\ dx \qquad u = \sec x + \tan x,$

$du = \sec x \tan x + sec^2\ x,$ entonces,

$$\int \frac{\sec x\ (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\ dx = \int \frac{du}{u} = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

4. $\int \sec(3x)\ \ dx = \int \frac{\sec x\ (\sec(3x) + \tan(3x))}{\sec(3x) + \tan x(3x)}\ dx \qquad u = \sec(3x) + \tan(3x),$

$du = 3\sec(3x)\tan(3x) + 3sec^2\ (3x),$ entonces,

$$\int \frac{\sec(3x)\ (\sec(3x) + \tan(3x))}{\sec x(3x) + \tan(3x)}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|\sec(3x) + \tan(3x)| + C$$

5. $\int (\tan x + 1)^2 dx = \int (tanx^2 + 2tanx + 1) dx = \int (sec^2 x + 2 \tan x\ dx)$

$$= \tan x + 2\ln|\sec x| + C$$

FORMULAS 20 – 22

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ sen\ x + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = arc\ sen\ \frac{x}{3} + c$

3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc} \tan x + C$

4. $\int \frac{dx}{16+x^2} = \frac{1}{4}\text{arc} \tan \frac{x}{4} + C$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc} \sec x + C$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}} = \frac{1}{5}\text{arc} \sec \frac{x}{5} + C$

7. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

8. $\int \frac{dx}{x^2-16} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$

9. $\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3-x^2}{3+x^2}\right| + C$