1ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES
ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Sea una ecuación diferencial lineal de segundo orden escrita como:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = G(x),$$

Si $G(x) = 0,$ la ecuación diferencial es homogénea y se puede escribir

$$ay'' + by' + cy = G(x),$$

Donde a, b y c son coeficientes constantes que pertenecen al conjunto de los números reales y deben ser diferentes de cero.

Si se asume la solución general de una ecuación diferencial ordinaria homogénea de primer grado y se determinan sus respectivas derivadas se tiene

$$y = ke^{rx}, \qquad y' = kre^{rx}, \qquad y'' = kr^2e^{rx}$$

Entonces la ecuación de coeficientes se puede escribir como

$$akr^2e^{rx} + bkre^{rx} + cke^{rx} = 0$$

$$ke^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Así se obtiene la ecuación auxiliar

$$ar^2 + br + c = 0$$

Cuya solución es

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Y la solución general de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes es:

$$y_{(x)} = y_{1(x)} + y_{2(x)}$$

$$y_{(x)} = k_1e^{r_1x} + k_2e^{r_2x}$$

Cuando se resuelve la ecuación auxiliar se pueden presentar alguno de los siguientes casos:

Caso 1. Raíces reales y diferentes: $r_1 \neq r_2$ hacen que la solución general sea de la forma

$$y_{(x)} = k_1e^{r_1x} + k_2e^{r_2x}$$

Caso 2. Raíces reales pero iguales: $r_1 = r_2$ la solución general es

$$y_{(x)} = k_1e^{r_1x} + k_2xe^{r_1x}$$

Caso 3. Raíces complejas conjugadas: $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, la solución general es

$$y_{(x)} = k_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + k_2 x e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Es difícil trabajar con este tipo de solución con exponenciales complejas por lo que se utiliza la formula de Euler para obtener soluciones reales de la ecuación diferencial.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ sen\ \theta$$

Así se tiene que:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\ sen\ \beta x \qquad \text{y} \qquad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\ sen\ \beta x$$

Se debe recordar que la función $\cos\beta x$ es una función par por lo que se debe tomar $\cos(\beta x) = \cos -(\beta x)$ y $sen\ \beta x$ es una función impar por lo que se debe tomar $sen\ \beta x = -sen\ \beta x$.

Si se hace primero $e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}$ y luego $e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}$ se tiene:

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x$$

$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2isen\ \beta x$$

Las dos consideraciones anteriores hacen que se obtenga

$$y_1 = k_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + k_2 e^{(\alpha-i\beta)x},\ \text{si } k_1 = k_1 = k_1 = k_1 = 1 \text{ se tiene}$$

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right) = 2\cos\beta x$$

$$y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right) = 2isen\ \beta x$$

En consecuencia la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y_{(x)} = e^{\alpha x}(k_1\cos\beta x + k_2 sen\ \beta x)$$

**Ejemplo 1**. Resolver el problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$$

Se determinan las raíces de la ecuación auxiliar: $r^2 - 2r + 10 = 0$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(10)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

$$r_1 = 1 + 3i, \qquad r_2 = 1 - 3i$$

Por lo que se obtiene como solución general de la ecuación

$$y_{(x)} = e^{x}(k_1\cos 3x + k_2 sen\ 3x)$$

Aplicando condiciones iniciales se tiene

$$-1 = e^0(k_1 \cos 3(0) + k_2 sen\, 3(0)), \quad \text{entonces} \quad -1 = k_1$$

$$y_{(x)} = e^x(-\cos 3x + k_2 sen\, 3x)$$

Derivando esta última ecuación y reemplazando por las condiciones dadas $y'(0) = 2$

$$y' = e^x(-\cos 3x + k_2 sen\, 3x) + e^x(3sen\, 3x + 3k_2 \cos 3x)$$

$$2 = -1 + 3k_2, \qquad k_2 = 1$$

Por lo que la solución de la ecuación diferencial es:

$$y_{(x)} = e^x\,(-\cos 3x + sen\, 3x)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

En general, la solución de una ecuación diferencial de orden *n* como

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

en donde cada coeficiente $a_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, es constante y real, se obtiene resolviendo una ecuación auxiliar polinomial de grado *n*:

$$a_n r^{(n)} + a_{n-1} r^{(n-1)} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Por lo que se obtiene una solución general

$$y = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} + \cdots + k_n e^{r_n x} = 0$$

**Ejemplo 2**. Resolver la siguiente ecuación

$$y''' + 3y'' - 4y = 0,$$

Se escribe como:

$$r^3 + 3r^2 - 4 = 0$$

Se puede verificar que una raíz del polinomio es $r = 1$

Luego haciendo

$$r^3 + 3r^2 - 4 \div r - 1$$

Se obtiene

$$r^3 + 3r^2 - 4 = (r-1)(r^2 + 4r + 4) = (r-1)(r+2)^2$$

Así se obtienen las siguientes raíces:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = r_3 = -2$$

Por lo que la solución general de la ecuación es:

$$y = k_1 e^x + k_2 e^{-2x} + k_3 x e^{-2x}$$

## EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales para $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

1. $y'' - y' - 6y = 0$
2. $y'' - 5y' + 6y = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$
4. $y'' + 8y' + 16y = 0$
5. $2y'' - 5y' + 3y = 0$
6. $2y'' + y' - 6y = 0$
7. $y'' - 2y' + 5y = 0$
8. $y'' + 2y' + 10y = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$
2. $y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0$
3. $y^{iv} - 11y'' - 18y' - 8y = 0$
4. $y''' - 7y' + 6y = 0$
5. $y''' - 5y' - 12y = 0$