JOSE VICENTE CONTRERAS JULIO

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta cuando $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, Esto es equivalente a decir que existe una función F(x,y) tal que

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Donde $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$

Como F(x,y) es una función diferenciable entonces las derivadas mixtas deben ser iguales, por eso se debe cumplir la condición:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

SOLUCION DE UNA ED EXACTA

Para resolver una ecuación diferencial exacta se debe tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Escribir la ecuación en la forma estándar:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

2. Comprobar la exactitud de la ecuación, esto es, verificar si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

   Esto significa que existe una función *F(x,y)= c* para la que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

3. Se integra *M* o *N* a conveniencia (*M* respecto a *x* o *N* respecto a *y*) obteniéndose de este modo la solución general de la ecuación aunque con una función incógnita *g* o *h* que aparece como constante de integración. Esto es:

$$F(x,y) = \int M dx + g(y)$$

O

$$F(x,y) = \int N dy + h(x)$$

4. Para despejar la función g o h se deriva F(x,y) con respecto a la variable independiente de g o h

5. Se iguala g' con N o h' con M, despejando y luego integrando con respecto a la variable dependiente de g o h; de este modo se encontrará la función g o h.

6. Finalmente se reemplaza g o h encontrado en la solución general F(x,y).

Ejercicio 1.

$$(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$$

1. Escribir la ecuación en la forma estándar:

$$(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$$

2. Verificar si es exacta.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(5x + 4y)}{\partial y} = 4$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(4x - 8y^3)}{\partial x} = 4$$

La ED es exacta, esto significa que existe una función ***F(x,y)=c*** para la que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 5x + 4y \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4x - 8y^3$$

3. Se integra M o N a conveniencia (M respecto a x o N respecto a y) obteniéndose de este modo la solución general de la ecuación aunque con una función incógnita g o h que aparece como constante de integración. Esto es:

$$F(x,y) = \int (5x + 4y)dx$$

$$F = \frac{5x^2}{2} + 4xy + g(y)$$

4. Para despejar la función g o h se deriva F(x,y) con respecto a la variable independiente de g o h

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4x + g'(y)$$

5. Se iguala g' con N o h' con M, despejando y luego integrando con respecto a la variable dependiente de g o h; de este modo se encontrará la función g o h.

$$4x + g'(y) = 4x - 8y^3$$

$$g'(y) = -8y^3$$

$$g = \int -8y^3\, dy = -8 \int g = dy$$

$$g = -2y^4 + c$$

6. Finalmente se reemplaza g o h encontrado en la solución general F(x,y).

$$F = \frac{5x^2}{2} + 4xy + \ g(y)$$

$$F = \frac{5x^2}{2} + 4xy - 2y^4 + c$$

La solución de la ecuación es de la forma:

$$F(x, y) = c$$

$$\frac{5x^2}{2} + 4xy - 2y^4 = c$$

Ejercicios: Resolver, si es posible:

1. $(2x - 1)dx + (3y + 7)dy = 0$
2. $(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0$
3. $(sen\ y - y\ senx)dx + (\cos x + xcos\ y\ - y)dy = 0$
4. $(e^x sen\ y - 2y\ sen\ x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$
5. $(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$

6. $(2xy^3 + y\cos x)dx + (3x^2y^2 + sen\ x)dy = 0$
7. $(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$
8. $x^{-1}ydx + (\ln x + 3y^2)dy = 0$
9. $(2x + y + 2xy^2)dx + (x + 2x^2y)dy = 0$
10. $(y^2 - 2xy + 6x)dx - (x^2 - 2xy + 2)dy = 0$