ECUACION DIFERENCIAL DE BERNOULLI

La **ecuación diferencial de Bernoulli** es una Ecuación diferencial ordinaria de primer orden que se caracteriza por Adoptar la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P_{(x)}y = F_{(x)}y^n \qquad n \neq 1$$

METODO DE SOLUCION:

1. Se escribe la ecuación en forma estándar:
$$\frac{dy}{dx} + P_{(x)}y = F_{(x)}y^n$$
2. Se convierte la ecuación en ED lineal multiplicando todo por y^{-n} (Dividiendo por y^n)
$$y^{-n}\,\frac{dy}{dx} + P_{(x)}y^{1-n} = F_{(x)}$$
3. Se define la variable $z = y^{1-n}$ y su derivada con respecto a *y*: $\frac{dz}{dy} = (1-n)y^{-n}$
4. Se despeja y^{-n} para obtener: $\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dy} = y^{-n}$
5. Se hacen las respectivas sustituciones:
$$y^{-n}\,\frac{dy}{dx} + P_{(x)}y^{1-n} = F_{(x)}$$
$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} + P_{(x)}z = F_{(x)}$$
6. Se cancela *dy* y se multiplica por *(1 – n)* para obtener:
$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P_{(x)}z = (1-n)F_{(x)}$$

Ya es una ecuación diferencial lineal en *z*, por lo tanto se resuelve como una ED Lineal, teniendo en cuenta de hacer, al final, los respectivos cambios de variable.

Ejercicio: Resolver la ecuación diferencial

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y = xy^3$$

1. Se escribe la ecuación en forma estándar, para ello se divide por *2x*:
$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{y^3}{2}$$
2. Se convierte la ecuación en ED lineal multiplicando todo por $y^{-n} = y^{-3}$

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-2}=\frac{1}{2}$$

3. Se define la variable **z=** $\boldsymbol{y^{1-n}}$ y su derivada con respecto a *y*: $\boldsymbol{\frac{dz}{dy}=(1-n)y^{-n}}$

$$\boldsymbol{z=y^{-2},}\ \text{entonces}\ \boldsymbol{\frac{dz}{dy}=(-2)y^{-3}}$$

4. Se despeja $\boldsymbol{y^{-n}}$

$$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}=y^{-3}}$$

5. Se hacen las respectivas sustituciones:

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}z=\frac{1}{2}$$

6. Se cancela *dy* y se multiplica por *(1 – n)* = -2, así se obtiene:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=-1$$

Ya es un ED lineal en *z*, se procede a su resolución:

Resolver la ED lineal:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=-1$$

1. Se identifica $P_{(x)}=-\frac{2}{x}$
2. Se obtiene el factor integrante $\mu=\boldsymbol{e^{\int P_{(x)}dx}}$

$$\mu=\boldsymbol{e^{-2\int\frac{dx}{x}}=e^{-2ln|x|}=e^{ln|x^{-2}|}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}}$$

3. Se multiplica por el factor integrante para obtener:

$$\frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x^3}z=-\frac{1}{x^2}$$

4. Se reconoce la derivada el producto:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}z\right]=-\frac{1}{x^2}$$

5. Se integra en ambos lados para obtener:

$$\mu z=\int \mu Q_{(x)}dx$$

$$\frac{1}{x^2}z=\int -\frac{1}{x^2}dx$$

$$\frac{1}{x^2}z = \frac{1}{x} + c$$

6. Se despeja z

$$z = x + cx^2$$

7. Se sustituye ***z=*** $\boldsymbol{y^{-2}}$ obteniendo

$$\frac{1}{y^2} = x + cx^2$$

8. Se despeja *y*.

$$y = \sqrt{\frac{1}{x + cx^2}}$$

EJERCICIOS: Resolver las siguientes ED de Bernoulli:

1. $x\frac{dy}{dx} + y - x^2y^2 = 0$
2. $\frac{dy}{dx} = y + e^x y^2$
3. $\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$
4. $x^2\frac{dy}{dx} + y^2 - xy = 0$
5. $x^2\frac{dy}{dx} - 3y^4 - 2xy = 0$
6. $y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy = 0$
7. $dy + (y - xy^4)dx = 0$
8. $x\frac{dy}{dx} - y = \frac{x^2}{y^2}$
9. $2\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}$
10. $xy' + y = 3x\sqrt{y}$